الباب السادس
بعض التوزيعات الاحتمالية وتطبيقاتها

مقدمة

إذا كان مدى المتغير العشوائى X مجموعة محدودة من القيم فى هذه الحالة يمكن القول بأن X متغير عشوائى منفصل، مثال على ذلك عدد الوحدات المنتجة لإحدى الآلات، عدد أطفال الأسرة، عدد مرات ظهور الكتابة عند إلقاء قطعة نقود،....وهكذا.

أما إذا كان عدد القيم التى يأخذها المتغير العشوائى X غير محدود (لا يمكن عده) فـى هـذه الحالة يقال إن المتغير العشوائى X متغير عشوائى متصل. مثال على ذلك أوزان أو أطوال مجموعـة من الطلاب أو الدخل السنوى لمجموعة من الأسر، أو درجات الحرارة فى فترة ما،... إلخ.

إن دراسة المتغيرات العشوائية المتصلة والمنفصلة والتوزيعات الاحتمالية المصاحبة لكل نـوع من أنواع المتغيرات العشوائية لتساعدنا فى الحصول على نتائج يمكن استخدامها فى تقـديرات معـالم المجتمع كذلك اختبارات الفروض المتعلقة باتخاذ القرارات المهمة حيث يتم اتخاذ مثل هذه القـرارات على أساس علمى صحيح.

وفيما يلى بعض التوزيعات الاحتمالية المهمة التى لها العديد من التطبيقات المهمة فـى الحيـاة العملية مثل توزيع ذى الحدين وتوزيع بواسون والتوزيع فوق الهندسي، وذلـك للمتغيـر العـشوائى المنفصل (المتقطع) والتوزيع الطبيعى وتوزيع ت وتوزيع ف للمتغير العشوائى المتصل.

٦-١ توزيع ذى الحدين

توجد العديد من ظواهر الحياة تكون النتيجة الممكنة لها إما نجاحا وإما فشلاً، واحتمال أن تكون نتيجة التجربة نجاحا هو p بينما إحتمال نتيجة الفشل هو q بحيث $(p+q=1)$. فإذا تم تكرار مثـل هذه التجربة n من المرات فإننا نحصل كل مرة على نجاح أو فشل (نتيجة كل محاولة مـستقلة عـن نتيجة المحاولة الأخرى) بمعنى أنه يتم إجراء التجربة n من المحاولات المستقلة. المتغير العشوائى x

الذى يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال n من المحاولات يقال أنه يتبع توزيـع ذى الحـدين الذى له داله التوزيع الاحتمالى التالية:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\ p^{x}\ q^{n-x}, \qquad x=0,1,2,\ldots,n$$

ويستخدم هذا التوزيع فى الحياة العملية لكثير من الظواهر، مثل النجاح والرسوب فى الامتحان لمجموعة من الطلبة، إصابة هدف معين من عدمه أو التدخين وعدم التدخين لمجموعة من الأشـخاص فى مدينة ما...إلخ.

مثال (١): إذا كانت نسبة النجاح فى أحد المقررات هى ٠,٨ فإذا تقدم لهذا الامتحان ١٥ طالب ما هو احتمال أن ينجح:

١- جميع الطلاب
٢- ٨ طلاب
٣- ٦ طلاب
٤- ولاطالب

الحل:

$$n=15, \qquad p=0.8, \qquad q=0.2$$

$$P(X=x)=\binom{15}{x}\ (0.8)^{x}\ (0.2)^{15-x}, \qquad x=0,1,2,\ldots,15$$

١- نجاح جميع الطلاب:

$$P(X=15)=\binom{15}{15}\ (0.8)^{15}\ (0.2)^{15-15}$$
$$P(X=15)=1\times 0.035\times 1$$
$$P(X=15)=0.035$$

٢- نجاح ٨ طلاب:

$$P(X=8)=\binom{15}{8}\ (0.8)^{8}\ (0.2)^{15-8}$$
$$P(X=8)=6435\times 0.1677722\times 0.0000128$$
$$P(X=8)=0.013819$$

٣- نجاح ٦ طلاب:

$$P(X=6)=\binom{15}{6}\ (0.8)^{6}\ (0.2)^{15-6}$$
$$P(X=6)=5005\times 0.262144\times 0.000000512$$
$$P(X=6)=0.000672$$

٤- عدم نجاح أى طالب:

$$P(X=0)=\binom{15}{0}\ (0.8)^0\ \ (0.2)^{15-0}$$
$$P(X=0)=1\times 1\times 0$$
$$P(X=0)=0$$

مثال (٢): إذا كانت نسبة الإصابة بمرض الإنفلوانزا فى إحدى المدن فى فصل الشتاء هى ٠,٦ . تم إختيار ٢٠ شخص من هذه المدينة، ما احتمال أن يكون:

١- ٧ أشخاص مصابون بالإنفلونزا.

٢- جميعهم أصحاء.

٣- جميعهم مرضى.

٤- ما إحتمال أن يكون نصفهم مرضى.

الحل:

$$n=20,\qquad p=0.6,\qquad q=0.4$$
$$P(X=x)=\binom{20}{x}\ (0.6)^x\ \ (0.4)^{20-x},\qquad x=0,1,2,\ldots,20$$

١- ٧ أشخاص مصابون بالإنفلونزا:

$$P(X=7)=\binom{20}{7}\ (0.6)^7\ \ (0.4)^{20-7}$$
$$P(X=7)=77520\times 0.0279936\times 0.00000671$$
$$P(X=7)=0.014563$$

٢- جميعهم أصحاء:

$$P(X=0)=\binom{20}{0}\ (0.6)^0\ \ (0.4)^{20-0}$$
$$P(X=0)=1\times 1\times 0.000$$
$$P(X=0)=0$$

٣- جميعهم مرضى:

$$P(X=20)=\binom{20}{20}\ (0.6)^{20}\ \ (0.4)^{20-20}$$
$$P(X=20)=1\times 0.00004\times 1$$
$$P(X=20)=0.00004$$

٤- إحتمال أن يكون نصفهم مرضى:

$$P(X=10)=\binom{20}{10}\ (0.6)^{10}\ \ (0.4)^{20-10}$$
$$P(X=10)=184756\times 0.006046618\times 0.0001$$
$$P(X=10)=0.111715$$

مثال (٣): صندوق يحتوى على ٧ مصابيح فإذا كان احتمال أن يكون المصباح جيدا هو ٠,٨، تم اختيار ٣ مصابيح عشوائيا، ما احتمال:

١- أن تكون جميع المصابيح جيدة.
٢- أن يكون هناك مصباح تالف.
٣- أن تكون جميع المصابيح تالفة.
٤- أن يكون هناك مصباح جيد على الأقل.
٥- أن يكون هناك مصباح جيد على الأكثر.

الحل:

$n = 3, \qquad p = 0.8, \qquad q = 0.2$

$$P(X = x) = \binom{3}{x} (0.8)^x (0.2)^{3-x}, \qquad x = 0,1,2,3$$

١- أن تكون جميع المصابيح جيدة:

$$P(X = 3) = \binom{3}{3} (0.8)^3 (0.2)^{3-3}$$
$$P(X = 3) = 1 \times 0.512 \times 1$$
$$P(X = 3) = 0.512$$

٢- أن يكون هناك مصباح تالف:

$$1- P(X = 2) = 1- \binom{3}{2} (0.8)^2 (0.2)^{3-2}$$
$$= 1- (3 \times 0.64 \times 0.2)$$
$$= 1- 0.384$$
$$1- P(X = 2) = 0.616$$

٣- أن تكون جميع المصابيح تالفة:

$$P(X = 0) = \binom{3}{0} (0.8)^0 (0.2)^{3-0}$$
$$P(X = 0) = 1 \times 1 \times 0.008$$
$$P(X = 0) = 0.008$$

٤- أن يكون هناك مصباح جيد على الأقل:

$$P(X \ge 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$
$$P(X \ge 1) = \binom{3}{1} (0.8)^1 (0.2)^{3-1} + \binom{3}{2} (0.8)^2 (0.2)^{3-2} + \binom{3}{3} (0.8)^3 (0.2)^{3-3}$$
$$P(X \ge 1) = 0.096 + 0.384 + 0.512$$
$$P(X \ge 1) = 0.992$$

٥- أن يكون هناك مصباح جيد على الأكثر

$$P(X \le 1) = P(X = 1) + P(X = 0)$$
$$P(X \le 1) = 0.096 + 0.008$$
$$P(X \le 1) = 0.104$$

٦-٢ توزيع بواسون

يستخدم هذا التوزيع لحساب احتمال وصول عدد معين إلى مركز الخدمة، مثال على ذلك:

- ماكينة السحب الآلي.
- شباك البنك.
- طلمبة بنزين فى محطة الوقود.
- سويتش التليفون.
- وصول السيارات إلى أماكن الانتظار.

فى هذا التوزيع سوف يعبر المتغير العشوائى X عن أعداد الواصلين خلال فترة زمنية معينة (دقيقة، ساعة،...) $x = 0,1,2,....$ وسوف تمثل λ متوسط أعداد الواصلين إلى محطة الخدمة فى الفترة الزمنية المحددة.

وسوف تعبر دالة الاحتمال عن وجود عدد X فى فترة زمنية محددة فى محطة الخدمة. وتأخذ دالة الاحتمال الشكل التالي:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x = 0,1,2,....$$

مثال (٤): إذا كان متوسط عدد طالبى استخدام ماكينة السحب الآلى فى أحد البنوك هو ٥ أفراد كل نصف ساعة.

أ- احسب الاحتمالات التالية لإعداد الواصلين كل نصف ساعة بأن يكون:

١- ١٠ أشخاص.

٢- يقل عن ٣ أشخاص.

٣- أكثر من شخص واحد.

٤- يتراوح العدد بين ٤ و ٨ أشخاص.

ب- احسب نفس الاحتمالات السابقة إذا كان معدل الوصول كل ربع ساعة.

ج- احسب نفس الاحتمالات السابقة إذا كان معدل الوصول كل ساعة.

الحل: أ- معدل الوصول كل نصف ساعة.

$\lambda = 5$,

$P(X = x) = \dfrac{e^{-5} 5^x}{x!}$, $\quad x = 0,1,2,....$

1- $P(X = 10) = \dfrac{e^{-5} 5^{10}}{10!}$

$P(X = 10) =$ 0.018132789

2- $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X < 3) = \dfrac{e^{-5} 5^0}{0!} + \dfrac{e^{-5} 5^1}{1!} + \dfrac{e^{-5} 5^2}{2!}$

$P(X < 3) =$ 0.006737947 + 0.033689735 + 0.084224337

$P(X < 3) =$ 0.124652

3- $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1)$

$P(X > 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$

$P(X > 1) = 1 - ($0.006737947 + 0.033689735$)$

$P(X > 1) = 1 -$ 0.040428

$P(X > 1) =$ 0.959572318

4- $P(4 \le X \le 8) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$

$P(4 \le X \le 8) = \dfrac{e^{-5} 5^4}{4!} + \dfrac{e^{-5} 5^5}{5!} + \dfrac{e^{-5} 5^6}{6!} + \dfrac{e^{-5} 5^7}{7!} + \dfrac{e^{-5} 5^8}{8!}$

$P(4 \le X \le 8) =$ 0.17546737 + 0.17546737 + 0.146222808 + 0.104444863 +
+ 0.065278039

$P(4 \le X \le 8) =$ 0.66688045

ب- معدل الوصول كل ربع ساعة.

إذا متوسط معدل الوصول:

$\lambda = 5 \times \dfrac{1}{2} = 2.5$

$P(X = x) = \dfrac{e^{-2.5} 2.5^x}{x!}$, $\quad x = 0,1,2,....$

1- $P(X = 10) = \dfrac{e^{-2.5} 2.5^{10}}{10!}$

$P(X = 10) =$ 0.000215725

2- $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$P(X < 3) = \dfrac{e^{-2.5} 2.5^0}{0!} + \dfrac{e^{-2.5} 2.5^1}{1!} + \dfrac{e^{-2.5} 2.5^2}{2!}$

$P(X < 3) =$ 0.082084999 + 0.205212497 + 0.256515621

$P(X < 3) =$ 0.543813

3- $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1)$

$P(X > 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$

$P(X > 1) = 1 - (0.082084999 + 0.205212497)$
$P(X > 1) = 1 - 0.287297$
$P(X > 1) = 0.712703$

4- $P(4 \le X \le 8) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$

$$P(4 \le X \le 8) = \frac{e^{-2.5}2.5^4}{4!} + \frac{e^{-2.5}2.5^5}{5!} + \frac{e^{-2.5}2.5^6}{6!} + \frac{e^{-2.5}2.5^7}{7!} + \frac{e^{-2.5}2.5^8}{8!}$$

$P(4 \le X \le 8) = 0.133601886 + 0.066800943 + 0.027833726 + 0.009940617 +$
$+ 0.003106443$
$P(4 \le X \le 8) = 0.241284$

ج- معدل الوصول كل ساعة

إذا متوسط معدل الوصول:

$\lambda = 5 \times 2 = 10$

$$P(X = x) = \frac{e^{-10}10^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2,....$$

1- $P(X = 10) = \dfrac{e^{-10}10^{10}}{10!}$

$P(X = 10) = 0.125110036$

2- $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$P(X < 3) = \frac{e^{-10}10^0}{0!} + \frac{e^{-10}10^1}{1!} + \frac{e^{-10}10^2}{2!}$$

$P(X < 3) = 0.0000454 + 0.000454 + 0.00227$
$P(X < 3) = 0.002769$

3- $P(X > 1) = 1 - P(X \le 1)$
$P(X > 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$
$P(X > 1) = 1 - (0.0000454 + 0.000454)$
$P(X > 1) = 1 - 0.000499$
$P(X > 1) = 0.999501$

4- $P(4 \le X \le 8) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$

$$P(4 \le X \le 8) = \frac{e^{-10}10^4}{4!} + \frac{e^{-10}10^5}{5!} + \frac{e^{-10}10^6}{6!} + \frac{e^{-10}10^7}{7!} + \frac{e^{-10}10^8}{8!}$$

$P(4 \le X \le 8) = 0.01891664 + 0.03783327 + 0.06305546 + 0.09007923 +$
$+ 0.11259903$
$P(4 \le X \le 8) = 0.322484$

مثال (5): إذا كان متوسط وصول السفن إلى أحد الموانيء سفينتين فى اليوم. اوجد احتمال أن يصل إلى هذا الميناء فى يوم معين ثلاث سفن.

الحل:

$\lambda = 2$,

$$P(X=x)=\frac{e^{-2}2^{x}}{x!},\qquad x=0,1,2,....$$

$$P(X=3)=\frac{e^{-2}2^{3}}{3!}$$

$$P(X=3)=0.18044704$$

٦-٣ التوزيع فوق الهندسي

يفيد التوزيع فوق الهندسى فى حالة المجتمعات التى يتم تقسيمها إلى صفتين أو جـزءين حيـث تتميز هذه المجتمعات بكونها محدودة وصغيرة. وتتم عملية سحب العينة من المجتمع بـدون إرجـاع. وعليه فإن شرط استقلال المحاولات يكون غير متحقق، حيث يؤثر السحب بدون إرجاع علـى نـسبة إحدى الصفتين وذلك لصغر حجم المجتمع. مثال على ذلك سحب عينة من الطلاب فى إحدى الشعب، سحب عينة من السيارات لدراسة عدد السيارات المعيبة...إلخ.

والمتغير العشوائى X فى هذه الحالة يمثل عدد حالات النجاح وتكون دالة التوزيع الاحتمالى له علـى الصورة:

$$P(X=x)=\frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{N}{n}},\qquad x=0,1,2,...,n$$

حيث:

- N تمثل حجم المجتمع.
- n تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع.
- $a+b=N$.

مثال (٦): معرض سيارات به ٤٨ سيارة من بينها ٨ سيارات معيبة. أختيرت عينة عشوائية من ٥ سيارات اوجد:

أ- احتمال أن تكون العينة المسحوبة كلها سليمة

ب- احتمال أن تكون سيارة واحدة معيبة

ج- احتمال وجود سيارتين معيبتين على الأقل بالعينة

الحل: سوف يمثل المتغير العشوائى X عدد السيارات المعيبة فى العينة المسحوبة، a يمثل عدد السيارات المعيبة فى المجتمع و b يمثل عدد السيارات السليمة فى المجتمع. وسوف تأخذ دالة التوزيع الإحتمالى الصورة:

$$P(X = x) = \frac{\binom{8}{x}\binom{40}{5-x}}{\binom{48}{5}}, \qquad x = 0,1,2,3,4,5$$

أ- احتمال أن تكون العينة المسحوبة كلها سليمة

$$P(X = 0) = \frac{\binom{8}{0}\binom{40}{5-0}}{\binom{48}{5}}$$

$$P(X = 0) = \frac{1 \times 658008}{1712304}$$

$$P(X = 0) = 0.38$$

ب- احتمال أن تكون سيارة واحدة معيبة

$$P(X = 1) = \frac{\binom{8}{1}\binom{40}{5-1}}{\binom{48}{5}}$$

$$P(X = 1) = \frac{8 \times 91390}{1712304}$$

$$P(X = 1) = 0.43$$

ج- احتمال وجود سيارتين معيبتين على الأقل بالعينة

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$$

$$P(X \geq 2) = 1 - (0.38 + 0.43)$$

$$P(X \geq 2) = 0.19$$

مثال (٧): شحنة من ٨٠ جهاز كهربائى من بينها ٤ أجهزة معيبة، تم سحب عينة عشوائية من ٣ أجهزة.اوجد إحتمال أن تحتوى هذه العينة على جهاز واحد متعطل.

الحل: سوف يمثل المتغير العشوائى X عدد الأجهزة المعيبة فى العينة المسحوبة، a يمثل عدد الأجهزة المعيبة فى الشحنة و b يمثل عدد الأجهزة السليمة فى الشحنة. وسوف تأخذ دالة التوزيع الاحتمالى الصورة:

$$P(X=x)=\frac{\binom{4}{x}\binom{76}{3-x}}{\binom{80}{3}}, \qquad x=0,1,2,3$$

احتمال أن يكون هناك جهاز واحد معيب بالعينة هو:

$$P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{76}{3-1}}{\binom{80}{3}}$$

$$P(X=1)=\frac{4\times 2860}{82160}$$

$$P(X=1)=0.14$$

٦-٤ التوزيع الطبيعى القياسي

التوزيع الطبيعى هو عبارة عن توزيع له الشكل الجرسى وهـو متماثـل حـول المتوسـط μ وتساوى المساحة الكلية تحت المنحنى الواحد الصحيح. ولهذا التوزيع العديد من التطبيقات المهمة فـى الحياة العملية لمعظم الظواهر الطبيعية مثل الأطوال والأوزان ودرجات الطلاب ومقياس ضغط الـدم وغيرها من الظواهر البيولوجية والعلمية. وتعطى داله الكثافة الحتمالية للمتغير العشوائى X الذى يتبع التوزيع الطبيعى ($X\approx N(\mu,\sigma^2)$) كالتالي:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

حيث:

$$-\infty<X<\infty, \qquad -\infty<\mu<\infty, \qquad \sigma>0$$

هذا ويعتبر التوزيع الطبيعى القياسى حالة خاصة من التوزيع الطبيعـى وذلـك حيـث يكـون المتوسط له يساوى الصفر والانحراف المعيارى يساوى الواحد الـصحيح. وسـوف نرمـز للمتغيـر العشوائى الذى يتبع التوزيع الطبيعى القياسى بالرمز Z أى أن $Z\approx N(0,1)$ وتعطـى دالـة الكثافـة الاحتمالية لهذا التوزيع من خلال العلاقة:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\;e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad -\infty<z<\infty$$

وكما هو معلوم هناك جداول خاصة بهذا التوزيع يمكن من خلالها حساب الاحتمالات المطلوبة.

هذا ويمكن تحويل جميع القيمة غير القياسية (قيم تتبع التوزيع الطبيعى) إلى قيم قياسية وذلـك مـن خلال العلاقة التالية:

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

فمثلاً إذا كان لدينا متغير عشوائى يتبع التوزيع الطبيعى $X \approx N(16,16)$ فيمكن تحويله إلى متغير عشوائى له التوزيع الطبيعى القياسى كالتالي:

$$Z = \frac{x-16}{4}$$

المتغير العشوائى الجديد Z يتوزع توزيعا طبيعيا قياسيا له المتوسط صفر والانحراف المعيارى واحد.

مثال (٨): باستخدام الجدول الإحصائى الذى يعطى المساحة تحت المنحنى الطبيعى القياسي، اوجد الاحتمالات التالية:

1- $P(z \le 1.72)$, 2- $P(z \le 1.07)$
3- $P(z \ge 0.29)$ 4- $P(-1.91 \le z \le 0.45)$

الحل:

1- $P(z \le 1.72) = 0.9573$
2- $P(z \le 1.07) = 0.8577$
3- $P(z \ge 0.29) = 1 - P(z < 0.29)$
$P(z \ge 0.29) = 1 - 0.6141$
$P(z \ge 0.29) = 0.3859$
4- $P(-1.91 \le z \le 0.45) = P(z \le 0.45) - P(z \le -1.91)$
$P(-1.91 \le z \le 0.45) = 0.6736 - 0.0281$
$P(-1.91 \le z \le 0.45) = 0.6455$

مثال (٩): إذا كانت $X \approx N(16,16)$ اوجد الاحتمالات الأتية:

1- $P(X \le 14)$
2- $P(X \ge 22)$

الحل: نلاحظ أن المتغير العشوائى X هو متغير عشوائى غير قياسى وعليه سوف نقوم بتحويله إلى المتغير العشوائى القياسى كالتالي:

1- $x = 14 \Rightarrow Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$\Rightarrow z = \frac{14-16}{4} = -0.5$

$\Rightarrow P(X \le 14) = P(Z \le -0.5) = 0.3085$

2- $x = 22 \Rightarrow Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{22-16}{4} = 1.5$$
$$\Rightarrow P(X \geq 22) \ = \ P(Z \geq 1.5) \ = 1 - P(Z < 1.5)$$
$$\Rightarrow P(Z \geq 1.5) \ = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

مثال (١٠): إذا كانت درجة ذكاء الطلاب فى الجامعة تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ١٠٥ وانحراف معيارى ١٠. ما هى نسبة الطلبة الذين تقع درجة ذكائهم بين ١٠٠،١١٤.

الحل:

$$X \approx N(105,100)$$
$$P(100 \leq X \leq 114) = P(\frac{100-105}{10} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{114-105}{10})$$
$$P(100 \leq X \leq 114) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.9)$$
$$P(100 \leq X \leq 114) = P(z \leq 0.9) - P(z \leq -0.5)$$
$$P(100 \leq X \leq 114) = 0.8159 - 0.3085$$
$$P(100 \leq X \leq 114) = 0.5074$$

٦-٥ توزيع ت

إذا كانت دالة الكثافة الإحتمالية للمتغير العشوائى t على الصورة:

$$f(t) = c(1+\frac{t^2}{v})^{-v+\frac{1}{2}}, \qquad -\infty < t < \infty$$

فإن هذا التوزيع يسمى توزيع t حيث v تمثل درجات الحرية و c ثابت يعتمد على v ليجعل المساحة تحت المنحنى تساوى الواحد الصحيح.

ويتشابه توزيع t مع التوزيع الطبيعى القياسى من حيث الشكل الجرسى إلا أنه أكثر انخفاضـا منه وعندما تزداد درجات الحرية فإن توزيع t يقترب من التوزيع الطبيعى القياسي.

وهناك جداول خاصة لهذا التوزيع مثل التوزيع الطبيعى القياسى إلا أن جداول توزيع t تختلف بعض الشيئ حيث يعتمد الجدول على درجات الحرية التى تمثل العمود الرأسى والمساحات التى تمثل الخط الأفقى بينما الأعداد داخل الجدول تمثل قيم t المناظرة لدرجات الحرية والمساحة.

مثال (١١): اوجد قيمة t لكل من:

$t\,(0.975, 20)$ $\qquad t\,(0.995, 12)$

$t\,(0.95, 5)$ $\qquad t\,(0.90, 7)$

الحل: باستخدام جدول t نحصل على:

$t\,(0.975, 20) = 2.086$

$t\ (0.995, 12) = 3.055$
$t\ (0.95, 5) = 2.015$
$t\ (0.90, 7) = 1.415$

مثال (١٢): اوجد درجات الحرية المناظرة للقيم التالية:

$t\ (0.995, \nu) = 2.921$ $\qquad$ $t\,(0.975, \nu) = 2.228$
$t\ (0.90, \nu) = 1.337$ $\qquad$ $t\ (0.95, \nu) = 1.721$

الحل: باستخدام جدول t نحصل على:

$t\,(0.975, \nu) = 2.228 \;\Rightarrow\; \nu = 10$
$t\ (0.995, \nu) = 2.921 \;\Rightarrow\; \nu = 16$
$t\ (0.95, \nu) = 1.721 \;\Rightarrow\; \nu = 21$
$t\ (0.90, \nu) = 1.337 \;\Rightarrow\; \nu = 16$

٦-٦ توزيع ف

من التوزيعات المهمة التى تستخدم فى اختبارات الفروض هو توزيع F. هـذا التوزيـع دالـة الكثافة الاحتمالية له تعطى من خلال العلاقة التالية:

$$f(F) = \frac{cF^{(\nu_1-2)/2}}{(\nu_2+\nu_1 F)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}, \qquad F > 0$$

يسمى هذا التوزيع بتوزيع F وعبر عنه بالرمز $F(\nu_1,\nu_2)$ حيث ν_1 و ν_2 يمثلان درجات الحرية و c هو ثابت يعتمد على درجات الحرية حتى تصبح المساحة تحت المنحنى مساوية للواحد الصحيح.

ويلاحظ فى هذا التوزيع بأنه ملتو ناحية اليمين هذا وكلما ازدادت درجات الحرية اقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعى القياسي.

هذا وسوف نستخدم الرمز $F(\alpha,\nu_1,\nu_2)$ (α ترمز إلى المساحة) لإيجاد قيمة F المناظرة لدرجات الحرية والمساحة المعطاة.

مثال (١٣): اوجد:

F (0.05, 10 , 7) $\qquad$ F (0.01, 11 , 15)

الحل:

F (0.01, 11 , 15) = 0.235
F (0.05, 10 , 7) = 0.318

تمارين

١- إذا كانت نسبة المعيب فى الإنتاج تمثل ١٠% سحبت عينة مكونة من ٥ وحدات. اوجد الاحتمالات التالية:

أ- لا يوجد فى العينة وحدة معيبة.
ب- توجد وحدة معيبة فقط.
ت- توجد وحدة معيبة على الأكثر.
ث- توجد وحدتان معيبتان على الأقل.

٢- إذا كان احتمال أن يتخرج طالب من الجامعة هو ٠,٦. سحبت عينة مكونة من ٤ طلاب، اوجد الاحتمالات الآتية:

- أن يتخرج جميع الطلاب فى العينة.
- أن يتخرج طالبان فقط.
- أن يتخرج طالبان على الأقل.

٣- مصنع به ١٥ عامل و ٥ مهندسين، سحبت عينة عشوائية مكونة من ٣ أفراد. اوجد الاحتمالات الآتية:

١- العينة كلها من المهندسين.
٢- العينة بها عامل واحد ومهندسان.
٣- العينة كلها من العمال.

٤- إذا كان المتغير العشوائى Z له توزيع طبيعى قياسي، فاوجد الاحتمالات التالية:

- $P(Z < 1.8)$
- $P(Z > -0.5)$
- $P(-0.2 < Z < 0.5)$

٥- إذا كان المتغير العشوائى X الذى يتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط يساوى ٨٠ وانحراف معيارى يساوى ٤,٨ اوجد الاحتمالات التى يأخذها المتغير العشوائى للقيم التالية:

١- أقل من ٨٧,٢.

٢- أكبر من ٧٦,٤.

٣- بين ٨١,٢، ٨٦.

٤- بين ٧١,٦، ٨٨,٤.

٦- إذا كانت درجة الحرارة خلال شهر مارس تتبع التوزيع الطبيعى بمتوسط ٢٠ درجة وانحراف معيارى ٣,٣٣ درجة.
اوجد احتمال أن تكون درجة الحرارة بين ٢١,١١، ٢٦,٦٦ فى هذا الشهر.

٧- إذا كان إحتمال أن يكسب فريق مباراة هو ٠,٧٥ فإذا لعب هذا الفريق ٤ مباريات. اوجد احتمال أن يكسب هذا الفريق:

- مباراة واحدة على الأقل.
- مباريتان فقط.
- أكثر من نصف المباريات.

٨- إذا كان ٢٠% من إنتاج ماكينة مسامير تالفًا. اوجد احتمال أن يكون من بين ٤ مسامير تم اختيارها عشوائيا:

- مسمار واحد تالف.
- لا توجد مسامير تالفة.
- يوجد مسماران تالفان على الأكثر.

٩- صندوق يحتوى على ٤ كرات بيضاء و ٦ كرات حمراء. تم سحب عينة عشوائية مكونة من ٣ كرات بدون إرجاع. افرض أن المتغير العشوائى X يمثل عدد الكرات البيضاء فى العينة المسحوبة اوجد التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X.

١٠- إذا كان متوسط عدد الحوادث على الطريق الصحراوى هو ٣ حوادث يوميا. ما هو احتمال وقوع أكثر من ٥ حوادث فى يوم ما.؟

١١- اوجد قيمة t لكل من:

$t\,(0.95, 20)$
$t\,(0.90, 28)$
$t\,(0.99,12)$
$t\,(0.975, 7)$
$t\,(0.995, 13)$

١٢- اوجد قيمة b فى كل مما يأتي:

$t\,(b\,, 5) = 2.015$
$t\,(b\,, 20) = 1.325$
$t\,(b\,, 23) = 2.069$
$t\,(b\,, 12) = 2.681$
$t\,(b\,, 15) = 2.131$

١٣- اوجد:

$F\,(0.01, 7\,, 12)$
$F\,(0.05, 12\,, 5)$
$F\,(0.01, 5\,, 8)$
$F\,(0.05, 5\,, 5)$

١٤- اوجد قيمة b فى كل مما يأتي:

$F\,(b, 8\,, 9) = 3.23$
$F\,(b, 9\,, 11) = 4.63$
$F\,(b, 3\,, 24) = 3.72$
$F\,(b, 2\,, 24) = 3.4$